

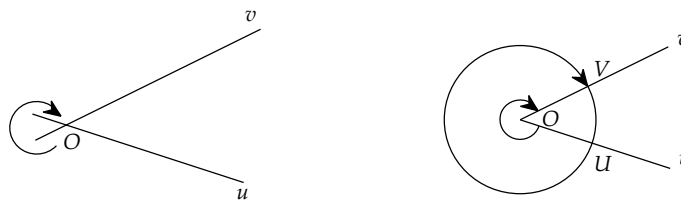
# BUỔI LIVE SỐ 03 – ÔN LUYỆN TOÁN 11

## PHƯƠNG PHÁP VÀ KỸ NĂNG XỬ LÝ CÁC BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

### I. HỆ THỐNG KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

#### 1. Góc lượng giác

- Mỗi góc lượng giác gốc  $O$  được xác định bởi tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  và số đo độ hay radian của nó.



- Cung lượng giác được xác định bởi mút đầu, mút cuối và số đo của nó trên đường tròn định hướng. Chiều quay dương là ngược chiều quay kim đồng hồ.
- Đơn vị đo góc và cung tròn:
  - ✓ **Đơn vị độ:** Để đo góc ta thường dùng đơn vị độ. Ta biết: Góc  $1^\circ$  bằng  $\frac{1}{180}$  góc bẹt.
  - ✓ **Đơn vị radian:** Cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$  và một cung  $AB$  trên đường tròn  $(O)$ . Ta nói cung tròn  $AB$  có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính  $R$ . Khi đó, ta cũng nói rằng góc  $AOB$  có số đo bằng 1 radian và viết  $\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}$ .
- Quan hệ giữa độ và radian:
 
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} ; 1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ ; \alpha \text{ rad} = \alpha \cdot \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ ; \alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} .$$
- Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính  $R$  và có số đo  $\alpha \text{ rad}$  thì có độ dài  $l = R\alpha$ .
- Nếu một góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo  $\alpha$  radian thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  có số đo  $\alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , mỗi góc tương ứng với một giá trị nguyên của  $k$ . Các cung lượng giác tương ứng trên đường tròn định hướng tâm  $O$  cũng có tính chất như vậy. Tương tự cho đơn vị độ.
- Hệ thức Sa-lơ: Với ba tia tùy ý  $Ou, Ov, Ow$ , ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

## 2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

### a. Hệ thức lượng giác cơ bản

$$1. \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$2. \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left( \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$3. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4. 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$5. 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$6. \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left( \alpha \neq k\frac{\pi}{2} \right)$$

$$7. \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \left( \alpha \neq \frac{k\pi}{2} \right)$$

### b. Hệ thức liên hệ giữa các cung đặc biệt

1. Cung đối nhau ( $\alpha$  và  $-\alpha$ )

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

2. Cung bù nhau ( $\alpha$  và  $\pi - \alpha$ )

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. Cung phụ nhau ( $\alpha$  và  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ )

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

4. Cung hơn kém  $\frac{\pi}{2}$  ( $\alpha$  và  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ )

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

5. Cung hơn kém  $\pi$  ( $\alpha$  và  $\pi + \alpha$ )

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

## 2. Công thức lượng giác

### a. Công thức cộng

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b + \cot a}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b - \cot a}$$

### **b. Công thức nhân đôi, nhân ba, hạ bậc**

#### **Công thức nhân đôi**

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$$

#### **Công thức nhân ba**

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

#### **Công thức hạ bậc**

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

$$\cot^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$$

### **c. Công thức biến tổng thành tích**

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$$

### **d. Công thức biến tích thành tổng**

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

## II. PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ CÁC DẠNG BÀI VỀ GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

### DẠNG 1

### BÀI TOÁN TÍNH TOÁN

Các bài toán thường gặp:

- Tính số đo góc lượng giác và biểu diễn trên đường tròn lượng giác, số đo cung lượng giác và các giá trị lượng giác
- Tính giá trị biểu thức lượng giác

Phương pháp giải:

- Áp dụng các kiến thức phần góc lượng giác, giá trị lượng giác và công thức lượng giác
- Sử dụng thành thạo máy tính casio để tối ưu thời gian xử lý bài toán. Lưu ý: máy tính cần để đúng đơn vị góc (độ hoặc rad)

**Câu 1.** Biết góc lượng giác  $-\frac{15\pi}{4}$  được biểu diễn dưới dạng  $\alpha + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  với  $\alpha \in (0; 2\pi)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $k \in (0; 4)$ .

B.  $k \in (-3; 0)$ .

C.  $k \in (1; 6)$ .

D.  $k \in (-6; -3)$ .

HOCMAI Topclass

**Câu 2.** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo  $-\frac{\pi}{7}$ . Trong các giá trị  $-\frac{29\pi}{7}$ ;  $-\frac{22\pi}{7}$ ;  $\frac{6\pi}{7}$ ;  $\frac{41\pi}{7}$ , những giá trị nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

A.  $-\frac{29\pi}{7}$ ;  $\frac{41\pi}{7}$ .

B.  $-\frac{29\pi}{7}$ ;  $-\frac{22\pi}{7}$ .

C.  $-\frac{22\pi}{7}$ ;  $\frac{41\pi}{7}$ .

D.  $\frac{6\pi}{7}$ ;  $\frac{41\pi}{7}$ .

**Câu 3.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Giá trị  $\sin \alpha$  bằng

**A.**  $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{7}}{4}$ .

**C.**  $-\frac{4}{5}$ .

**D.**  $-\frac{4}{3}$ .

**Câu 4.** Biết  $\cot a = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{4\sin a + 5\cos a}{2\sin a - 3\cos a}$  bằng

A.  $\frac{5}{9}$ .

**B.**  $\frac{1}{17}$ .

C. 13.

**D.**  $\frac{2}{9}$ .

**Câu 5.** Cho cùng  $x$  thỏa mãn  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ . Khi đó  $P = |\sin x - \cos x| = \sqrt{\frac{a}{b}}$ , trong đó  $a, b \in \mathbb{N}$  và phân số  $\frac{a}{b}$  tối giản. Giá trị của  $a + b$  bằng bao nhiêu?

**Đáp án:**

**Câu 6.** Cho  $\cot x = 2$  với  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  và các biểu thức  $B_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ ,  $B_2 = \sin 2x + \cos^2 x - \sin x \cos 3x$ .

Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

| Mệnh đề |                                 | Đúng                  | Sai                   |
|---------|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| a)      | $\sin x \neq 0$ .               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| b)      | $B_1 = -8$ .                    | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| c)      | $B_2 = \frac{38}{25}$ .         | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| d)      | $B_1 + B_2 = -\frac{166}{25}$ . | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## DẠNG 2: BÀI TOÁN RÚT GỌN, CHỨNG MINH

Áp dụng các công thức lượng giác để rút gọn, chứng minh biểu thức

- Với biểu thức chứa mẫu: Cần đưa cả tử và mẫu về dạng tích để có thể rút gọn biểu thức
- Bài toán chứng minh có thể chứng minh tương đương hoặc biến đổi một vế về vế còn lại

**Câu 1.** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được kết quả

A.  $\frac{1}{\sin x}$ .

### B. $\cos x$ .

### C. $\sin x$ .

**D.**  $\frac{1}{\cos x}$ .

**Câu 2.** Đơn giản biểu thức  $\left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1}\right)^2 + 1$  được kết quả bằng

A.  $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .

**B.**  $1 + \tan \alpha$ .

### C. 2.

**D.**  $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ .

**Câu 3.** Cho biết  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và các biểu thức:  $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)$ ;

$$B = \cos(\pi - \alpha) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

| Mệnh đề |                                   | Đúng                  | Sai                   |
|---------|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| a)      | $A = \cos \alpha - \sin \alpha$ . | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| b)      | $B = \cos \alpha + \tan \alpha$ . | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| c)      | $A + B = \frac{27}{20}$ .         | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| d)      | $A - B = -\frac{29}{20}$ .        | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

**DẠNG 3**

**ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC**

Để rút ra mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc trong một tam giác hoặc để xác định đặc điểm của tam giác (vuông, đều, ...) khi thỏa mãn biểu thức lượng giác cho trước và ngược lại cần áp dụng các công thức lượng giác và các tính chất hình học như: tổng ba góc trong tam giác bằng  $180^\circ$ , tam giác vuông có tổng hai góc nhọn bằng  $90^\circ$ , ...

**Câu 1.** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó

**A.**  $\sin C = -\sin(A + B)$ .

**B.**  $\cos C = \cos(A + B)$ .

**C.**  $\tan C = \tan(A + B)$ .

**D.**  $\cot C = -\cot(A + B)$ .

**Câu 2.** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó

**A.**  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ .

**B.**  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$ .

**C.**  $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ .

**D.**  $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ .

**Câu 3.** Cho  $\triangle ABC$  thỏa mãn  $\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan \frac{A}{2}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . **B.**  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ .  
**C.**  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ . **D.**  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B$ .

 **Dặn dò**

**Học sinh hoàn thành các Nhiệm vụ học tập sau:**

1. Bài tập tự luyện: <https://hocmai.vn/de-thi-truc-tuyen/97725/phuong-phap-va-ki-nang-xu-li-cac-bai-toan-ve-gia-tri-luong-giac.html>

2. Chuẩn bị trước các nội dung kiến thức để buổi học tiếp theo diễn ra hiệu quả

- Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và đặc trưng của đồ thị các hàm số đó.
- Các hàm số lượng giác  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ : tập xác định, tập giá trị, tính chẵn lẻ, bảng biến thiên, bảng giá trị và đồ thị các hàm số đó.

**HOCMAI Topclass**