

GỢI Ý ĐÁP ÁN

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [MAP] Chọn B.

$$\text{ĐKXĐ: } x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 2: [MAP] Chọn C.

Câu 3: [MAP] Chọn B.

Ta có $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) \in (0; \pi)$ nên hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 4: [MAP] Chọn A.

Câu 5: [MAP] Chọn C.

Câu 6: [MAP] Chọn D.

$$\text{Phương trình tương đương } \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0.$$

Câu 7: [MAP] Chọn A.

$$\text{Phương trình tương đương: } \cos 4x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 8: [MAP] Chọn C.

$$4\sin^2 x + \sin 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Nếu $\cos x = 0$ thay vào phương trình thấy không thỏa mãn

Suy ra $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-3) + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 9: [MAP] Chọn B.

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Xét trong khoảng $(0; \pi)$ ta thấy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 10: [MAP] Chọn D.

Câu 11: [MAP] Chọn C.

$$\text{Ta có: } -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m \leq 3$$

Suy ra có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 12: [MAP] Chọn B.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 13: [MAP] Chọn A.

$$\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra các điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên là hai điểm A và D.

Câu 14: [MAP] Chọn D.

$$-\cos^2 x + 4 \sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + 4 \sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(\sin x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \quad (\sin x + 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

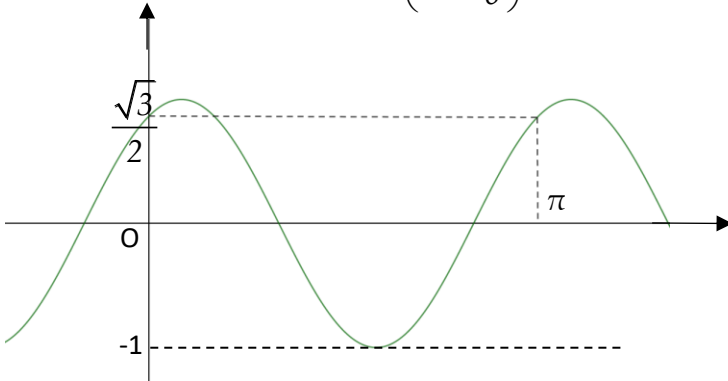
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra chỉ có một điểm biểu diễn họ nghiệm của phương trình trên.

Câu 15: [MAP] Chọn A.

$$\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2m \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = m$$

Ta xét đồ thị của hàm số $\cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$ như sau



Nhìn vào đồ thị ta dễ thấy để phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì $-1 < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 16: [MAP] Chọn D.

Có 5 cách chọn chữ số đầu tiên;

Có 5 cách chọn chữ số thứ hai; 4 cách chọn chữ số thứ ba; 3 cách chọn chữ số thứ tư

Vậy có tất cả 300 số.

Câu 17: [MAP] Chọn B.

Câu 18: [MAP] Chọn A.

Ta thấy với mỗi cách chọn ra 3 trong số 9 ứng viên để giữ chức vụ tổ trưởng, tổ phó và bí thư là một chỉnh hợp chập 3 của 9. Vậy số cách chọn là $A_9^3 = 504$

Câu 19: [MAP] Chọn C.

Câu 20: [MAP] Chọn B.

Câu 21: [MAP] Chọn D.

$$\text{Ta có } \left(x^3 - \frac{2}{x} \right)^5 = C_5^k x^{3(5-k)} (-2)^k x^{-k} = (-1)^k \cdot C_5^k \cdot 2^k \cdot x^{15-4k}$$

$$\text{Theo đề bài } \Rightarrow 15 - 4k = 7 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^7 \text{ là } (-1)^2 \cdot C_5^2 \cdot 2^2 = 40.$$

Câu 22: [MAP] Chọn C.

$n(\Omega) = C_9^2$. Gọi A là biến cố chọn được hai quả bóng màu trắng

$$\text{Suy ra } n(A) = C_4^2 \Rightarrow P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}.$$

Câu 23: [MAP] Chọn A.

Câu 24: [MAP] Chọn A.

Phép quay tâm O biến điểm $A(2;0)$ thành điểm $A'(0;2)$ chính là phép quay tâm O với góc 90° .

Câu 25: [MAP] Chọn C.

Câu 26: [MAP] Chọn D.

Câu 27: [MAP] Chọn B.

Ta có I là trung điểm của AB, suy ra
$$\begin{cases} 1 = \frac{5+x_A}{2} \\ 2 = \frac{3+y_A}{2} \end{cases} \Rightarrow x_A = -3; y_A = 1$$

Câu 28: [MAP] Chọn D.

Câu 29: [MAP] Chọn A. Ta có $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -4 \\ 3k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2$.

Câu 30: [MAP] Chọn C.

Mỗi phép tịnh tiến với vector $\vec{u}$ có giá cùng phương với d thì đều biến d thành chính nó.

PHẦN II: TỰ LUẬN

Bài 1: Giải phương trình: $\cot^6 x + 1 = \frac{(1 + 3\cos^2 2x)\cos 5x}{4\sin^6 x}$.

Lời giải

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Phương trình đề bài tương đương

$$\begin{aligned} \frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\sin^6 x} &= \frac{(4 - 3\sin^2 2x)\cos 5x}{4\sin^6 x} \\ \Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x &= \frac{(4 - 3\sin^2 2x)\cos 5x}{4} \\ \Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x &= \frac{(4 - 3\sin^2 2x)\cos 5x}{4} \\ \Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x &= (4 - 3\sin^2 2x)\cos 5x \\ \Leftrightarrow (4 - 3\sin^2 2x)(1 - \cos 5x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3\sin^2 2x = 0 \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 \leq 4 - 3\sin^2 2x \leq 4$

Nên ta có $5x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp với ĐKXĐ thì phương trình có các họ nghiệm là $x = \frac{m\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Bài 2: Cho đa giác đều gồm 64 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên bốn đỉnh của đa giác. Tính xác suất để tứ giác tạo thành có các cạnh đều là các đường chéo của đa giác.

Lời giải

Chọn 4 đỉnh bất kì của đa giác có C_{64}^4 suy ra $n(\Omega) = C_{64}^4$.

Gọi A là biến cố "4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có 4 cạnh đều là các đường chéo của đa giác"

Ta đánh số các đỉnh của đa giác $A_1, A_2, \dots, A_{64}$, các đỉnh của tứ giác cần tạo là ABCD.

Không mất tính tổng quát chọn $A_1 \equiv A$ và có 64 cách chọn.

Tiếp theo chọn các đỉnh B, C, D theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Do các cạnh của tứ giác phải là các đường chéo của đa giác nên giữa các đỉnh của tứ giác phải có ít nhất 1 đỉnh khác.

Gọi x_1 là số đỉnh nằm giữa A và B;

x_2 là số đỉnh nằm giữa B và C;

x_3 là số đỉnh nằm giữa C và D;

x_4 là số đỉnh nằm giữa D và A;

Ta có
$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60(1) \end{cases}$$

Suy ra mỗi bộ x_1, x_2, x_3, x_4 là một cách chọn tứ giác thỏa mãn.

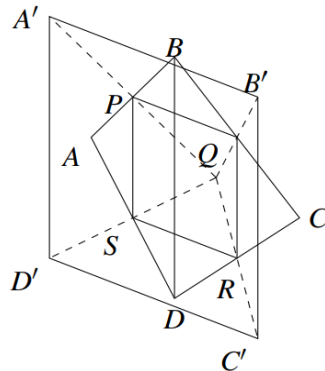
Xét phương trình (1), ta xét mô hình sau đây 111111.....11111 gồm 60 số 1 và 59 khoảng trống giữa các số 1.

Ta thấy số cách đặt 3 số 0 vào 59 khoảng trống trên chính là số nghiệm của (1), có C_{59}^3 cách.

Tuy nhiên do mỗi tứ giác bị lặp lại 4 lần nên $n(A) = \frac{64 \cdot C_{59}^3}{4}$,

Vậy $P(A) = \frac{64 \cdot C_{59}^3}{4 \cdot C_{64}^4} = 0.8186$.

Bài 3: Cho tứ giác lồi ABCD, điểm M thuộc miền trong ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là điểm đối xứng của M qua trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành.



Lời giải

Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA

Do A', B', C', D' lần lượt là điểm đối xứng của M qua trung điểm của AB, BC, CD, DA nên P, Q, R, S lần lượt là trung điểm MA', MB', MC', MD'.

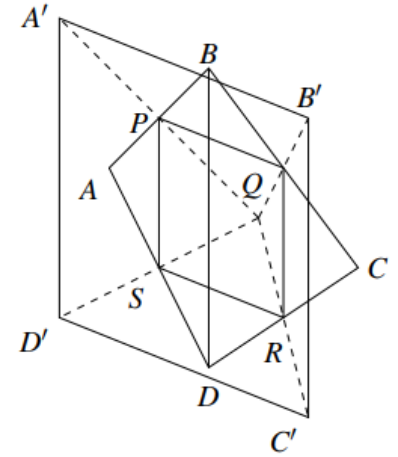
Ta có: $PS \parallel A'D'$ và $PS = \frac{1}{2}A'D'$, $QR \parallel B'C'$ và $QR = \frac{1}{2}B'C'$.

Mà PS là đường trung bình $\triangle ABD$ nên $MQ \parallel BD$ và $PS = \frac{1}{2}BD$

QR là đường trung bình $\triangle BCD$ nên $QR \parallel BD$ và $QR = \frac{1}{2}BD$

Do đó $A'D' \parallel B'C'$ và $A'D' = B'C'$.

Vậy $A'B'C'D'$ là hình bình hành.



Bài 4: Cho hai điểm A và B cố định, có $AB = 2$. Tìm tập hợp những điểm M' sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}$, biết rằng $MA^2 + MB^2 = 4$.

Lời giải

Gọi O là trung điểm của AB. Khi đó O cố định

Ta có $MA^2 + MB^2 = 4 = AB^2$.

Do đó tập hợp những điểm M là đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 1$.

Ta lại có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MM'}, \text{ (Do O là trung điểm của AB)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$$

Do đó, $M' = D_O(M)$. Mà M thuộc (C) nên M' thuộc (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm O.

Mặt khác, đường tròn (C) có tâm đối xứng là O nên $(C') \equiv (C)$.

Vậy tập hợp những điểm M' là đường tròn đường kính AB.